Leçon 229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

Développements :

Processus de Galton-Watson, Ellipsoïde de John-Loewner.

Bibliographie :

RDO, Rombaldi analyse réelle, Gourdon, Nourdin, OA, Briane, Bernis.

Rapport du jury 2017 :

L'énoncé et la connaissance de la preuve de l'existence de limites à gauche et à droite pour les fonctions monotones sont attendues. Ainsi on doit parler des propriétés de continuité et de dérivabilité à gauche et à droite des fonctions convexes de la variable réelle. Il est souhaitable d'illustrer la présentation de la convexité par des dessins clairs. On notera que la monotonie concerne les fonctions réelles d'une seule variable réelle, mais que la convexité concerne également les fonctions définies sur une partie convexe de Rn , qui fournissent de beaux exemples d'utilisation. Pour aller plus loin, la dérivabilité presque partout des fonctions monotones est un résultat remarquable (dont la preuve peut être éventuellement admise). L'espace vectoriel engendré par les fonctions monotones (les fonctions à variation bornée) relève de cette leçon. Enfin, la dérivation au sens des distributions fournit les caractérisations les plus générales de la monotonie et de la convexité ; les candidats maîtrisant ces notions peuvent s'aventurer utilement dans cette direction.

Rapport du jury 2018 :

L'énoncé et la connaissance de la preuve de l'existence de limites à gauche et à droite pour les fonctions monotones sont attendues. Ainsi on doit parler des propriétés de continuité et de dérivabilité à gauche et à droite des fonctions convexes de la variable réelle. Il est souhaitable d'illustrer la présentation de la convexité par des dessins clairs. On notera que la monotonie concerne les fonctions réelles d'une seule variable réelle, mais que la convexité concerne également les fonctions définies sur une partie convexe de R^n , qui fournissent de beaux exemples d'utilisation. L'étude de la fonctionnelle quadratique ou la minimisation de $||Ax - b||_2$ pourront illustrer agréablement cette leçon. Pour aller plus loin, la dérivabilité presque partout des fonctions monotones est un résultat remarquable (dont la preuve peut être éventuellement admise). L'espace vectoriel engendré par les fonctions monotones (les fonctions à variation bornée) relève de cette leçon. Enfin, la dérivation au sens des distributions fournit les caractérisations les plus générales de la monotonie et de la convexité ; les candidats maîtrisant ces notions peuvent s'aventurer utilement dans cette direction.

1 Fonctions monotones

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 (RDO tome3 p118)**.** *Fonctions croissantes, décroissantes, monotones, strictement monotones.*

Exemple 2. $1/x$ *est décroissante sur* R_+^*, exp *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.
$1_{\mathbb{Q}}$ *n'est pas monotone.*
Les fonctions affines sont monotones.
La fonction de répartition est croissante.
La limite simple de fonctions monotones est monotone.

Proposition 3 (RDO p119)**.** *Stabilité. . L'ensemble des fonctions croissantes est un cône.*
Une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions croissantes est croissante, $sup(f, g)$ *aussi.*
Si f *est croissante, alors* $-f$ *est décroissante.*
Si f *croissante positive, alors* $1/f$ *est décroissante.*
Si f, g *sont croissantes,* $f \circ g$ *aussi.*
Si f, g *sont décroissantes,* $f \circ g$ *est croissante.*
Si f, g *sont croissante et positive alors leur produit aussi.*

Contre exemple 4. *Le produit de fonctions monotones n'est pas forcément monotone :* $f(x) = x * x$.
Pareil pour l'inverse si f non-nulle.
Croissante + décroissante = on ne peut pas conclure.

Remarque 5. *L'espace des fonctions monotones/croissante/décroissante n'est pas un e.v (par exemple pas stable par différence).*

Contre exemple 6. $e^x + e^{-x} = 2\cosh(x)$.

Proposition 7 (RDO p118)**.** *Une fonction strictement monotone est injective. Une fonction monotone est injective si et seulement si elle est strictement monotone.*

Proposition 8 (Romb p59)**.** *L'application réciproque d'une bijection croissante est croissante.*

Exemple 9 (RDO p126)**.** $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ *est croissante, d'où* $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ *aussi.*

Proposition 10 (Nourdin p94)**.** *Toute fonction croissante* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *admet un point fixe.*

1.2 Existence de limites et continuité

Proposition 11 (RDO p119). *[Romb p44] Théorème de la limite monotone.*

Proposition 12 (RDO p120). *L'ensemble des points de discontinuité est au plus dénombrable.*

Proposition 13 (Pomm p82). $f(a^-) \leq f(a) \leq f(a^+)$, *l'égalité des limites à gauche et à droite entraîne la continuité en* a.

Contre exemple 14. $1_{\{0\}}$.

Application 15 (Nourdin p91 ?). *[Pomm p22] Le seul automorphismes de corps de* $\mathbb{R}$ *est l'identité.*

Application 16. *L'ensemble des atomes d'une variable aléatoire est au plus dénombrable.*

Exemple 17 (Hauchecorne p190). *Fonction strictement croissante sur* $[0, 1]$ *et discontinue en tout point de* $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

Proposition 18 (RDO p121). *[Romb p59] Une fonction monotone est continue si et seulement si son image est un intervalle.*

Contre exemple 19 (Romb p59). $f(I)$ *n'est pas nécessairement un intervalle.*

Contre exemple 20. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x1_{[0,1[}(x)$ *prolongée par 1-périodicité à* $\mathbb{R}$ *vérifie que* $f(R)$ *est un intervalle mais* f *non continue.*

Proposition 21 (RDO p121). *[Romb p60] Si* $f : I \to \mathbb{R}$ *est strictement monotone et continue, alors c'est un homéomorphisme sur son image.*

Exemple 22 (RDO p126). sin.

Proposition 23 (RDO p121). *Si* f *est un homéomorphisme de* I *sur* J *alors* f *est strictement monotone.*

1.3 Monotonie et dérivation

Proposition 24 (RDO p122). *Caractérisation de la monotonie en fonction de la dérivée.*

Corollaire 25. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *de classe* C^1 *. Alors* f *est monotone si et seulement si* f' *est de signe constant.*

Proposition 26 (RDO p122). *Caractérisation de la stricte monotonie en fonction de la dérivée.*

Contre exemple 27 (RDO p123). $x \mapsto x^3$.

Proposition 28 (Romb p85). *Une fonction monotone est dérivable presque partout.*

1.4 Fonctions à variation bornée

Définition 29 (Gourdon p114). *[FGN] Fonction à variation bornée*

Définition 30 (Gourdon p114). V_a^b.

Exemple 31. *Fonctions monotones.*

Exemple 32. *Les fonctions* C^1 *sont à variation bornée et on a* $V_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)|dx$ *via Taylor-intégral à l'ordre* 1 + *le th des accroissements finis.*

Proposition 33 (Gourdon p114). f *est à variation bornée si et seulement si il existe deux fonctions croissantes* g, h *telles que*$f = g - h$. *Donc l'ensemble des fonctions à variations bornées est engendrée par les fonctions monotones. (Poser* $g(x) = V_a^x(f) et h(x) = g(x) - f(x)$*.)*

Contre exemple 34. *Fonction continue qui n'est pas à variation bornée :* $x \cos(1/x)$ *avec* 0 *en* 0 *ou* $x \sin(1/x)$.

2 Fonctions convexes

2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 35 (Romb p233). *Convexité, stricte convexité, concavité.*

Remarque 36 (Romb p234). *La convexité signifie que le graphe de* f *est en-dessous de la corde* $(x, f(x)), (y, f(y))$.

Proposition 37 (Romb). *Caractérisation avec l'épigraphe.*

Proposition 38 (Pomm p107). *[OA p28] Le sup d'un ensemble de fonctions convexes est convexe.*

Exemple 39 (Romb p235). *[OA p27]* $|x|$ *est convexe.*

Proposition 40 (Romb p235). *Les fonctions affines sont convexes et concaves.*

Proposition 41 (Romb p236). *[OA] Une limite simple de fonctions convexes est convexe.*

Remarque 42. *Faux pour la stricte convexité.*

Proposition 43 (Romb p234). *Une somme de fonctions convexes est convexe.*

Proposition 44 (Romb p235). *Le produit de fonctions convexes n'est pas forcément convexe :* $f(x) = x^2.x$ *non-convexe.*

Proposition 45. *Faux pour la composée, mais vrai si on compose avec une fonction croissante.*

Proposition 46. *Cas réel : Si* f *continue, bijective sur son image, et convexe, alors* f^{-1} *est concave.*

2.2 Caractérisations des fonctions convexes

Proposition 47 (Romb p237). *Une fonction continue est convexe si et seulement si* $f((x+y)/2) \leq (f(x)+f(y))/2$.

Contre exemple 48 (Hauchecorne p198). *Indicatrice de* $\mathbb{Q}$.

Proposition 49 (Romb p239). f *est convexe si et seulement si lemme des trois pentes si et seulement si* $x \mapsto (f(x)-f(a))/(x-a)$ *est croissante.*

Application 50 (Romb p240). *Les fonctions affines sont les seules fonctions convexes et concaves.*

Application 51 (Romb p240). *Une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est constante si et seulement si elle est convexe et majorée.*

Contre exemple 52 (Romb p240). $f(x) = 1/(1+x)$, $x \mapsto -x$.

Application 53 (Romb p241). *Si* q *est continue de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}^+$ *non identiquement nulle alors l'unique solution à valeurs réelles bornée sur* $\mathbb{R}$ *de* $y" - qy = 0$ *est la fonction nulle. (Mais on a besoin de la caractérisation* $\varphi" \geq 0$ *alors convexe.)*

Proposition 54 (OA p29). *On suppose* f *différentiable. Alors* f *est convexe si et seulement si* f *est au dessus de ses tangentes si et seulement si* df *est "monotone". Dans le cas réel,* f' *est croissante.*

Remarque 55. *Les fonctions convexes ne sont pas toutes différentiables :* $|x|$.

Proposition 56 (OA p29). *On suppose* f *deux fois différentiable.* f *est convexe si et seulement si* $H_f(x)$ *est positive.*

Exemple 57 (OA p29). $< Ax, x >$ *est convexe si et seulement si* A *est positive.* $x \mapsto x^4$.

Exemple 58 (Romb p246).

2.3 Régularité des fonctions convexes

Proposition 59 (Romb p243). *Si* f *est convexe sur* I *alors elle admet une dérivée à droite et à gauche en point de l'intérieur de* I *, les fonctions dérivées sont croissantes + inégalité.*

Proposition 60. *L'ensemble des points tels que* $f' - d \neq f'_g$ *est au plus dénombrable. (Lien avec la monotonie.)*

Proposition 61 (OA p28). *[Romb p242] Si* f *est convexe définie sur* $I \subset \mathbb{R}$, *alors* f *est continue sur l'intérieur de* I.

Remarque 62 (Gourdon). *On a le même résultat en dimension finie.*

Contre exemple 63 (OA p28). *En dimension infinie, on n'a pas forcément la continuité. Dans* $(C([0,1]), ||.||_1)$ *l'application* $||.||_\infty$ *est convexe mais pas continue. Regarder la suite* $x \mapsto n1_{[0,1/n]}$ *et considérer deux termes consécutifs dont la différence en* $||.||_\infty$ *est plus grande que* 1*, mais dont l'intégrale de la différence tend vers* 0.

Contre exemple 64 (Romb p242). *Une fonction convexe sur* I *n'est pas nécessairement continue sur tout* I : $f(x) = 0$ *si* $0 < x < 1$ *et* $f(0) = f(1) = 1$.

Proposition 65 (Romb p243). f *est convexe sur* I *si et seulement si elle est continue et dérivable à droite sur* I *de dérivée à droite croissante.*

Proposition 66 (Romb p247). *Une fonction convexe et dérivable sur* I *dans* $\mathbb{R}$ *est continument dérivable. (lien avec la proposition de la partie* 1, f *continue si et seulement si* $f(I)$ *est un intervalle)*

Proposition 67. *Si* f *est convexe et dérivable alors* f' *est* C^1.

Proposition 68 (Gonnord Tosel). *En dimension* n *on a l'existence de dérivées partielles en tout point et une différentiabilité pp (ADMIS).*

3 Applications de la monotonie et de la convexité

3.1 Inégalité de convexité

Application 69. *Pour tout* $x \in [0, 2\pi]$, $1 - 2/\pi x \leq \cos x \leq 1$. *Application au calcul de l'intégrale de Fresnel par l'analyse complexe.*

Application 70 (Romb p248). *De même avec le sinus.*

Application 71. *sinc non intégrable.*

Application 72 (Romb p247). $e^x \geq x + 1$. *De même avec* ln.

Proposition 73 (Romb p249). *Inégalité de Jensen discrète.*

Application 74. *Sommes de Riemann.*

Application 75. *Inégalité arithmético-géométrique.*

Application 76. *Soient* $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, *soit* $\alpha \in [0,1]$. *Alors* $det((1-\alpha)A + \alpha B) \geq det(A)^{1-\alpha} det(B)^\alpha$, *avec inégalité stricte si* $\alpha \in]0,1[$ *et* $A \neq B$.

Application 77. *Ellipsoïde de John Loewner.*

Proposition 78. *Inégalité de Young.*

Proposition 79 (Romb p250). *Inégalité de Jensen continue.*

Proposition 80 (Briane). *Inégalité de Jensen.*

Application 81 (Briane). *$E[|X|] \geq |E[X]|$.*
$E[X]^2 \geq E[X]^2$.

Lemme 82 (Ouvrard). $\exp(tx) \leq (1-x)/2exp(-t) + (1+x)/2exp(t)$.

Proposition 83 (Ouvrard). *Inégalité de Hoeffding.*

Proposition 84 (Briane). *Inégalité de Hölder.*

Application 85 (Briane). *Inclusions des espaces L^p en mesure finie.*

Proposition 86 (Briane). *Inégalité de Minkowski.*

Application 87 (Briane). *L^p est un evn.*

Proposition 88. *Inégalité de Kantorovitch.*

Application 89. *Gradient à pas optimal.*

3.2 Comparaison séries et intégrales

Proposition 90 (Gourdon p204). *L'idée fondamentale de la comparaison est que si $u_n = f(n)$ et f est monotone, disons décroissante, alors on peut écrire $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$, et en intégrant $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k+1)$.*

Application 91 (Gourdon p204). *On obtient ainsi un développement asymptotique des nombres harmoniques.*

Proposition 92 (Gourdon p204). *[Nourdin p93] Si f est positive décroissante alors $\sum f(k) - \int_0^n f$ est convergente. En particulier, $\sum f(n)$ et $\int_{\mathbb{R}_+} f$ ont même nature.*

Application 93. *Séries de Bertrand.*

Proposition 94. *Théorème des séries alternées.*

3.3 Etude de suites

Proposition 95 (Romb p259). *[Gourdon p192 193] Si $(u_n)_n$ est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, alors la suite est monotone si f est croissante, et $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones de sens contraire si f est décroissante. S I est borné alors la suite est convergente et si de plus f est continue alors sa limite est un point fixe de f.*

Proposition 96 (Romb p259). *Si f est décroissante elle admet au plus un point fixe dans I. Si I est borné et f continue, alors (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergent vers des points fixes de $f \circ f$.*

Proposition 97 (Gourdon). *Thm de Dini : Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes continues qui converge simplement vers une fonction continue f alors la convergence est uniforme.*

Contre exemple 98. *C'est impossible si la limite n'est pas continue, par exemple $x \mapsto x^n$.*

Application 99. *La suite $f_n(x) = (1 + x/n)^n$ converge uniformément sur tout compact vers l'exponentielle.*

3.4 Optimisation

Proposition 100 (Rouvière p381). *Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in U$ et $df(a) = 0$ alors f admet un minimum global sur U.*

Contre exemple 101. $x \mapsto x^3$.

Proposition 102 (OA p30). *Les minima locaux des fonctions convexes sur un ensemble convexe sont en fait globaux et ils forment un ensemble convexe. De plus, une fonctions strictement convexe admet au plus un minimum.*

Remarque 103. *Une fonction strictement convexe n'admet pas toujours de minimum comme le montre la fonction* exp *sur $\mathbb{R}$ et il n'est pas forcément unique ($x \mapsto 0$).*

Proposition 104. *Les fonctions convexes continues coercives sont minorées et atteignent leur minimum.*

Proposition 105. *Optimisation dans un Hilbert : Soit H un espace de Hilbert séparable, C une partie de H, et $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction continue, coercive, et convexe. Alors f admet un minimum sur C, et ce minimum est atteint sur une sous-partie connexe par arcs.*

Application 106. *Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, soit $b \in \mathbb{R}^n$. La fonction $f : x \mapsto < Ax, x > - < b, x >$ est strictement convexe. Elle possède un unique minimum x qui vérifie $Ax = b$. Méthode du gradient à pas optimal.*

Application 107 (Bernis). *Ellipsoïde de John Loewner.*